

Sistemas con parámetros distribuidos Régimen Transitorio Líneas y Máquinas

Régimen Transitorio

Interesa en: conexiones, sobretensiones, caída de rayos, etc.

Líneas sin pérdidas: mayoría de los casos.

Líneas con pérdidas: ensayos analógicos, cálculos computacionales (EMTP, etc)

Línea sin pérdidas

Las ecuaciones del telegrafista para una onda cualquiera, con $r \approx 0$, $g \approx 0$ resultan :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \approx l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot u + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \approx c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad \therefore$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -l \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x \cdot \partial t} = l \cdot c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{donde } [l \cdot c] = \frac{\text{seg}^2}{\text{m}^2}$$

$$\therefore v = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}} \text{ (velocidad de propagación)}$$

Cuya solución (D'Alembert) es : $u = f_1(x - v \cdot t) + f_2(x + v \cdot t)$

Analogamente : $i = F_1(x - v \cdot t) + F_2(x + v \cdot t)$

Entonces dada $i = F_1(x - v \cdot t) + F_2(x + v \cdot t)$

y reemplazándola en $-\frac{\partial u}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \approx l \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= -\left[\frac{\partial}{\partial x} (f_1 + f_2) \right] = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] = \\ &= -\left[\frac{\partial f_1}{\partial (x - v \cdot t)} \frac{\partial (x - v \cdot t)}{\partial x} + \dots \right] = -f'_1 - f'_2 \\ &= l \cdot [F'_1 \cdot (-v) + F'_2 \cdot (v)] \therefore \begin{cases} f'_1 = l \cdot v \cdot F'_1 \\ f'_2 = -l \cdot v \cdot F'_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{pero como } [l \cdot v] = \Omega \quad \therefore Z_C = l \cdot v = l \cdot \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

es la impedancia de onda ó impedancia característica

$$\therefore \begin{cases} f_1 = Z_C \cdot F_1 \\ f_2 = -Z_C \cdot F_2 \end{cases} \quad \therefore i = \frac{1}{Z_C} [f_1(x - v \cdot t) - f_2(x + v \cdot t)]$$

Para resolver un problema se requiere conocer la longitud L de la línea y uno de los siguientes pares de valores: $l-c$; $\underline{Z_c} - v$ o $\underline{Z_c} - \tau$, siendo τ el tiempo de travesía de la onda.

Todo sistema de cargas libres, que origina una cierta distribución de tensiones, estará moviéndose a lo largo de la línea con velocidad v y originando la corriente i .

Si hay más de un conductor asociado a la línea, las ecuaciones pasan a ser matriciales, por ejemplo:

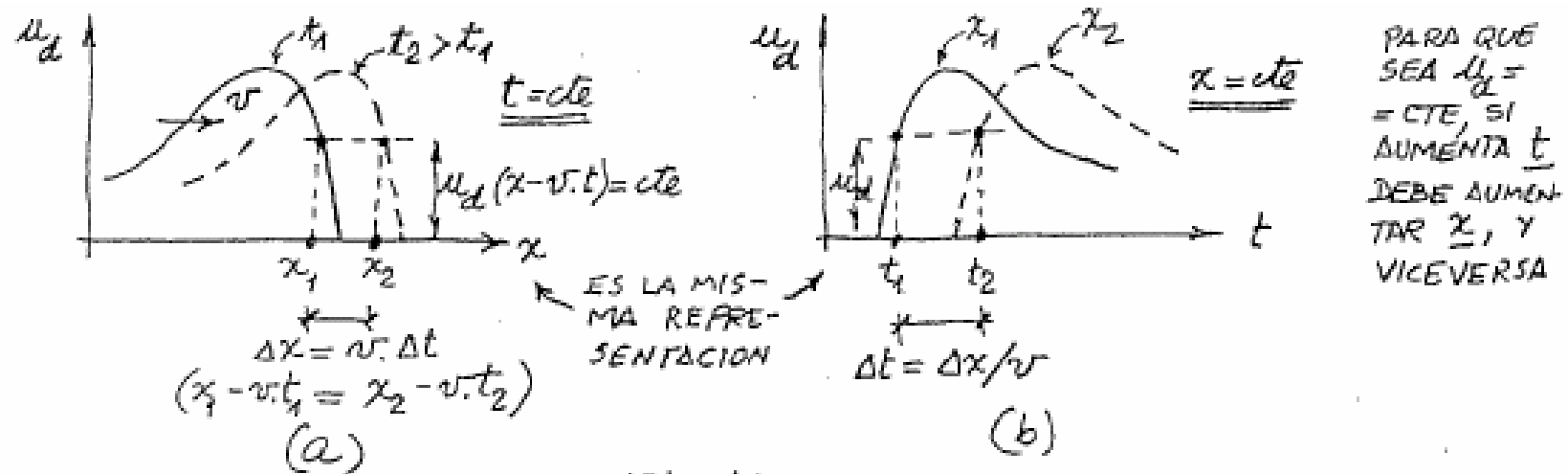
$$\left[-\frac{\partial u}{\partial x} \right] = [r] \cdot [i] + [l] \cdot \left[\frac{\partial i}{\partial t} \right]$$

y el problema puede ser muy complicado . Para líneas polifásicas transpuestas pueden usarse los valores “de servicio” y considerarla como línea única.

Las expresiones $u = f_1(x - v \cdot t) + f_2(x + v \cdot t)$ e
 $i = F_1(x - v \cdot t) + F_2(x + v \cdot t)$ pueden escribirse también como :

$$\begin{cases} u = u_d + u_i \\ i = i_d - i_i = \frac{u_d}{Z_C} - \frac{u_i}{Z_C} \end{cases}$$

y admiten la representación de la figura para una onda cualquiera directa, siendo análoga para la inversa



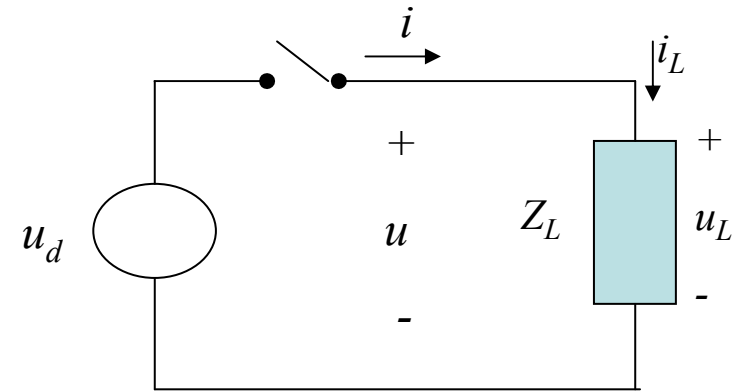
Circuito equivalente

En la salida de la línea, la relación entre u e i será :

$$u_L = Z_L(p) \cdot i_L$$

$$\therefore (*) \begin{cases} Z_L \cdot i_L = u_d + u_i \\ Z_C \cdot i_L = u_d - u_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_L = \frac{2 \cdot u_d}{Z_L + Z_C} \quad \Rightarrow u_L = \frac{2 \cdot u_d}{Z_L + Z_C} \cdot Z_L$$



El circuito equivalente de parámetros concentrados ,sin propagación, da u_L e i_L (transmitidos):

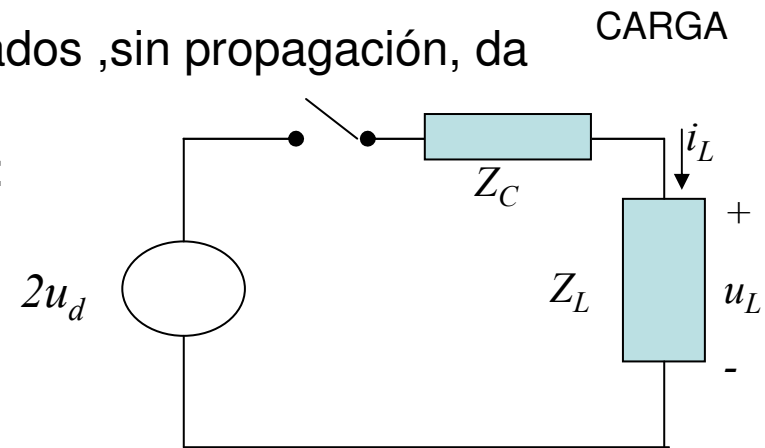
Restando (*), se calcula u_i e i_i en función de u_d :

$$2 \cdot u_i = (Z_L - Z_C) \cdot i_L = (Z_L - Z_C) \cdot \frac{2 \cdot u_d}{Z_L + Z_C}$$

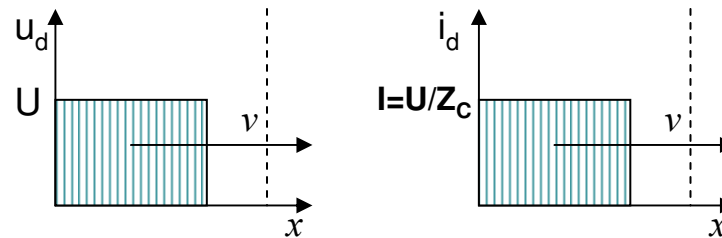
$$\therefore u_i = K_r \cdot u_d$$

con $K_r = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$ *factor de reflexión*.

$$i_i = \frac{u_i}{Z_C} = K_r \cdot \frac{u_d}{Z_C} \therefore i_i = K_r \cdot i_d$$

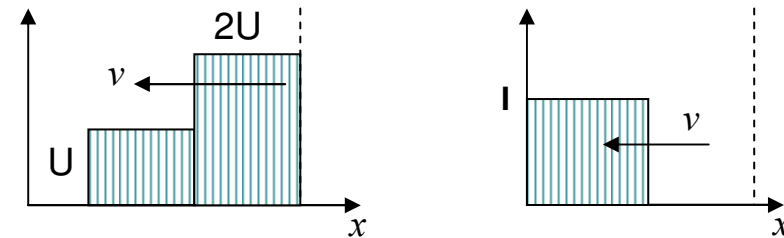


Ejemplo: las ondas de sobretensión (por ejemplo las producidas por una descarga atmosférica) tienen un frente de onda muy escarpado respecto a las ondas de frecuencia industrial. Aparecen simultáneamente:



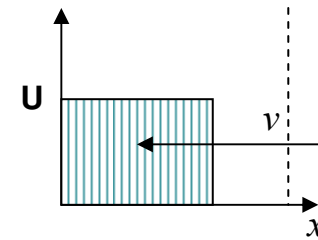
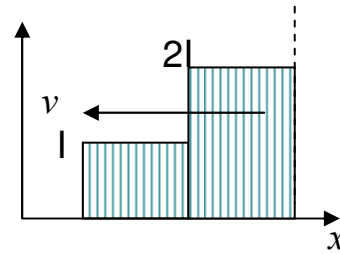
y al llegar a la carga se reflejan según el valor de estas:

Línea abierta:
 $Z_L = \text{infinito}$ $\rho_L = 1$

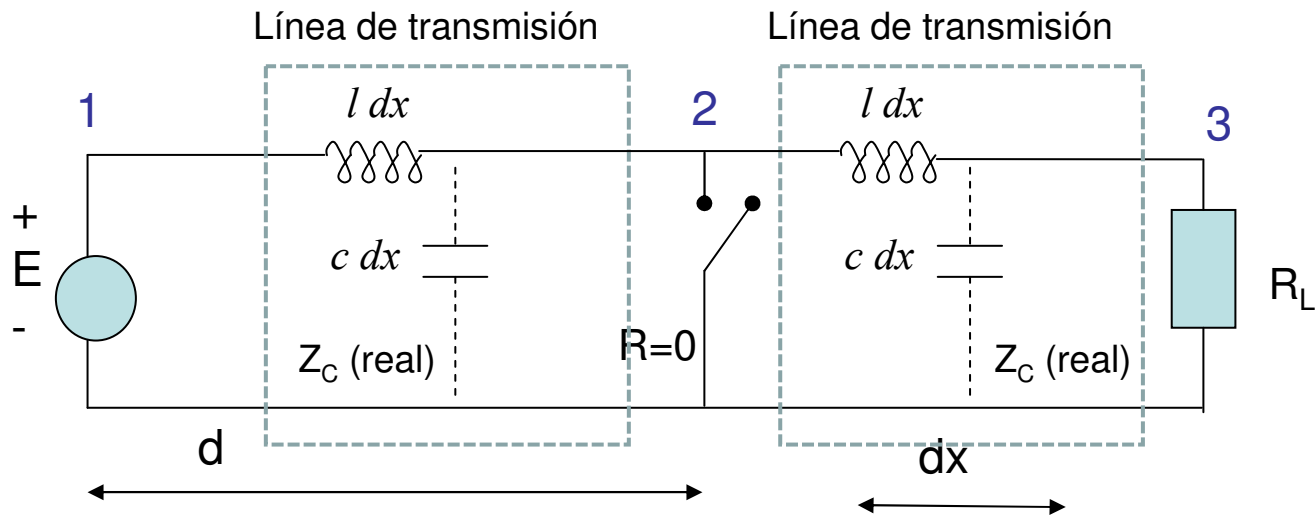


La tensión llega a $2U$, la i es $i=0$, en el extremo en un instante posterior a la llegada de la onda incidente.

Línea en C^0C^0 :
 $Z_L=0$, $\rho_L=-1$



Ejemplo: Línea de transmisión alimentada con fuente de cc con impedancia interna nula, sufre un C°C° a una distancia d de la fuente. Hallar $i(t)$ en el lugar del C°C° y en la fuente.



En $t \leq 0^-$, la u a lo largo de la línea es cte. (c cargados, l no afecta) $i_L = E/R_L = \text{cte.}$

En $t \geq 0^+$ el flujo regular de cargas hacia R_L se detiene de inmediato al producirse el C^oC^o ; hay un transitorio por descarga de los c a través de las l (la fuente es un C^oC^o para las i transitorias; y en fuente y en C^oC^o siempre puede considerarse $u=0$)

La tensión incidente para $t > 0$ será $u_i = E$, entonces:

$$u_r = \rho_L E$$

$$i_r = \rho_L I = \frac{E}{R_L}$$

$$u_t = \tau_1 E$$

$$i_t = \tau_1 I$$

En el corto (punto 1) tendremos:

$$\rho_1 = \frac{R - Z_C}{R + Z_C} = \frac{R - Z_C}{R + Z_C} = -1$$

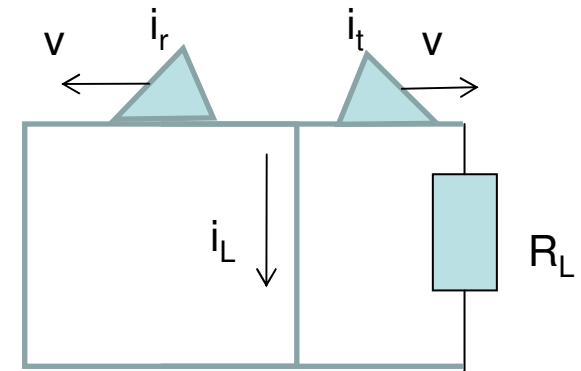
$$\tau_1 = \frac{2R}{R + Z_C} = 0$$

$$u_r = -E$$

$$u_t = 0$$

$$i_r = -I$$

$$i_t = 0$$



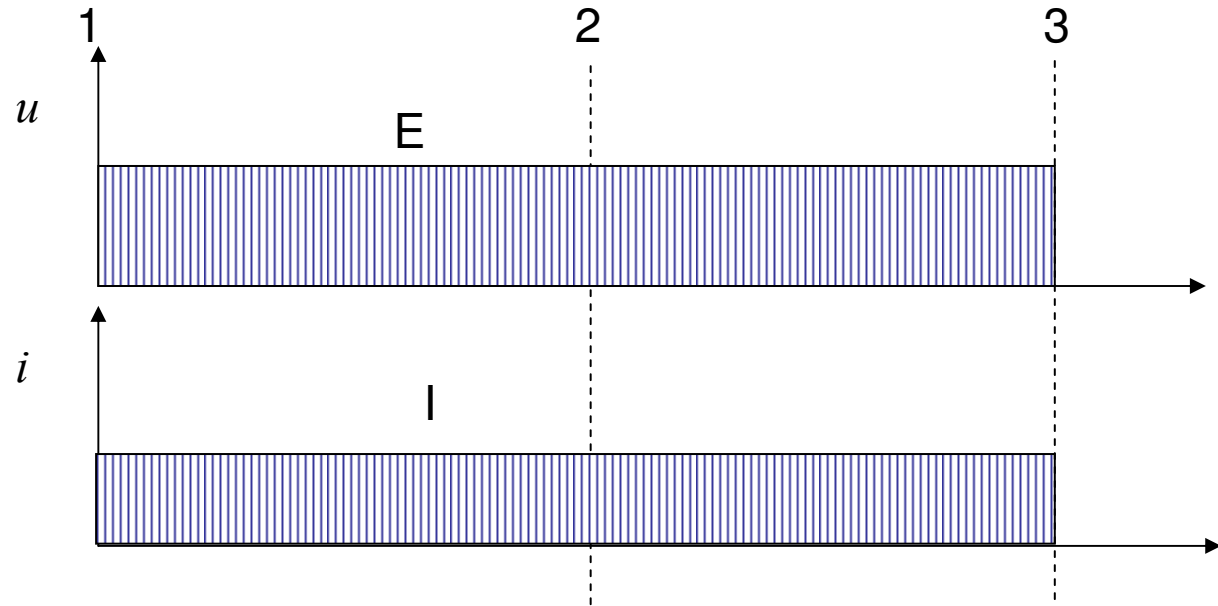
$$i_L + i_i + i_r \Rightarrow i_L = -i_i - i_r$$

$$i_L = -(-I) - (-I) = 2I$$

Diagrama espacial

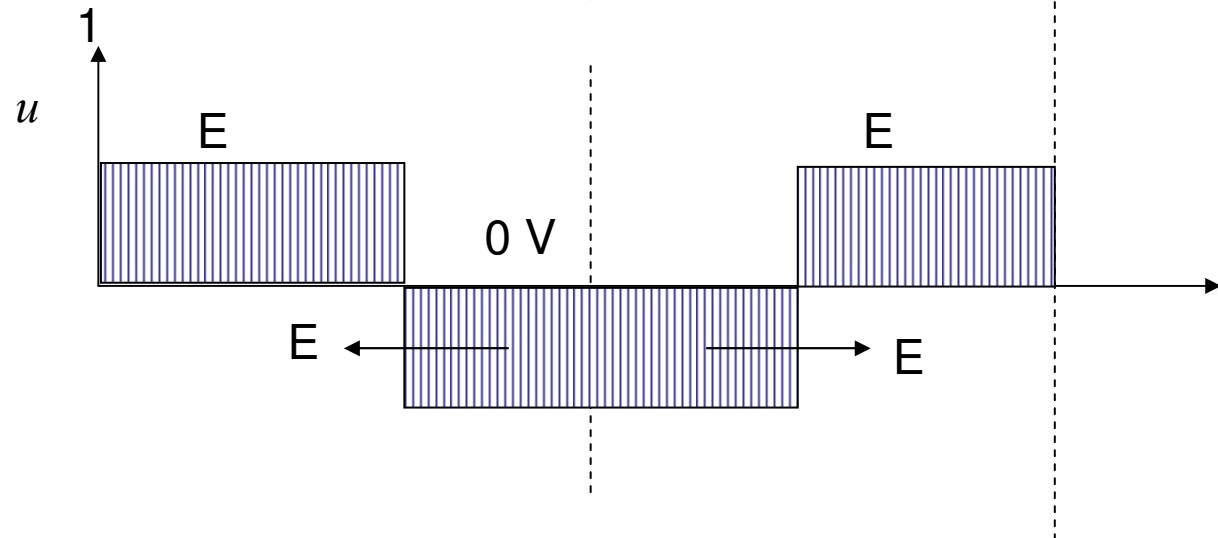
Sea $t_{12}=d/v$ el tiempo de travesía entre la fuente y el corto y $t_{23}=(\text{Long}-d)/v$ el tiempo de travesía entre el corto y la carga:

Para $t < 0$



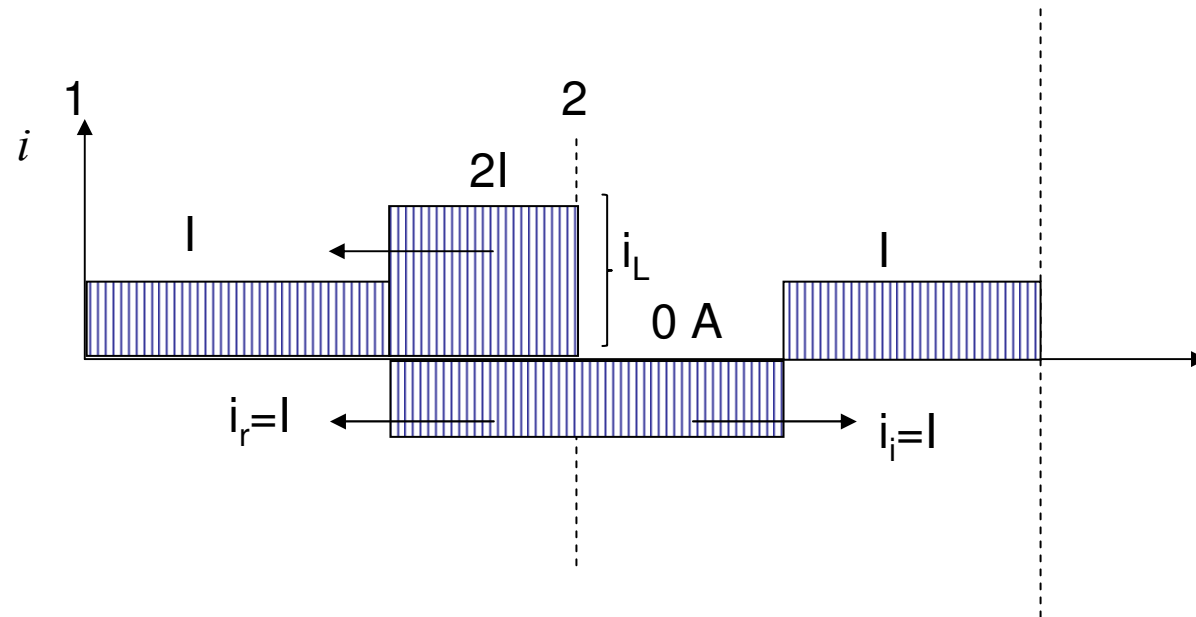
Para $t_{12} > t > 0$

$t_{23} > t > 0$



Para $t_{12} > t > 0$

$t_{23} > t > 0$



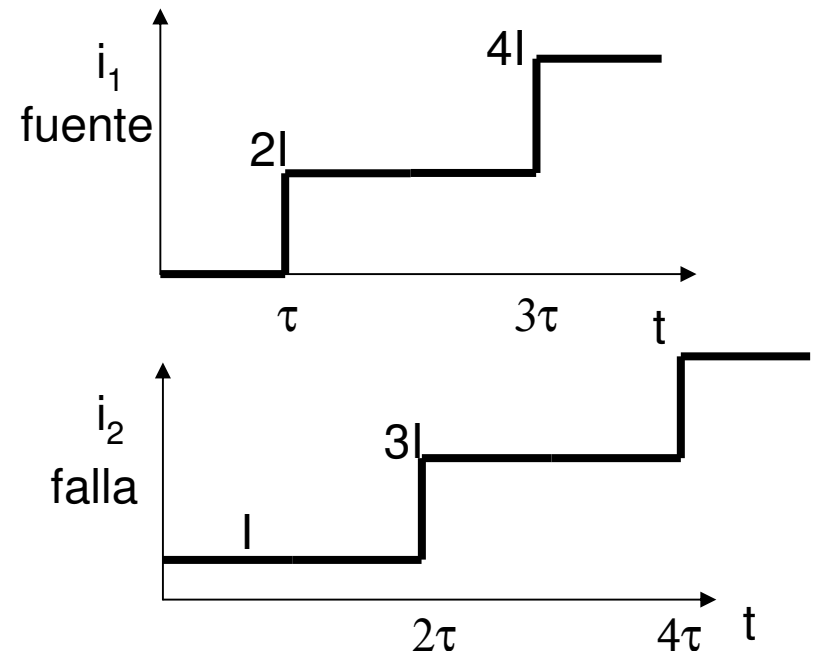
Condiciones de borde: en el C°C° siempre $u_2=0$, en fuente siempre $u_1=E$.

Cuando se aplica el C°C°, una onda de amplitud $-E$ se dirige hacia la fuente haciendo $u=0$. La acompaña una $i=i_d-i_i=0-(-E/Z_C)=E/Z_C$. Cuando las ondas alcanzan la fuente, las condiciones de borde imponen la iniciación de una nueva onda asociada a una $i_d=E/Z_C$, que se superpone a la preexistente. Al volver a incidir en el C°C° :

$$K_r = \frac{R - Z_C}{R + Z_C} = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1;$$

$$u_2 = 0 = u_d + u_i = E + u_i \therefore u_i = -E;$$

$$i = i_d - i_i = i_d - K_r i_d = \frac{E}{Z_C} \cdot [1 - (-1)] = 2 \frac{E}{Z_C}$$



Línea con derivación o discontinuidad

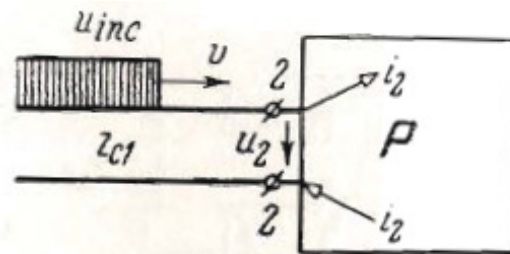
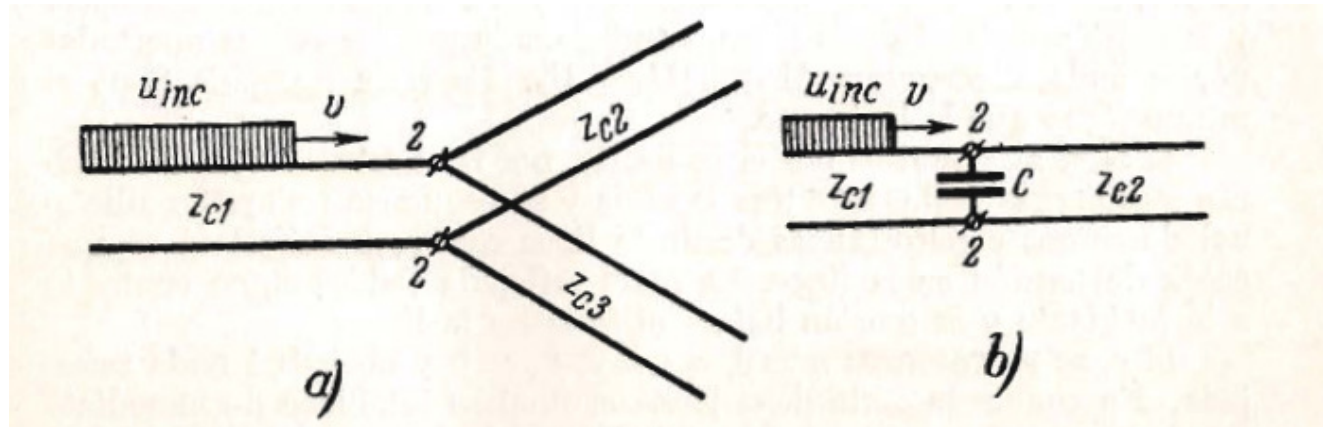


FIG. 7-11

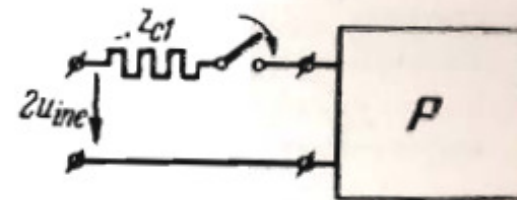
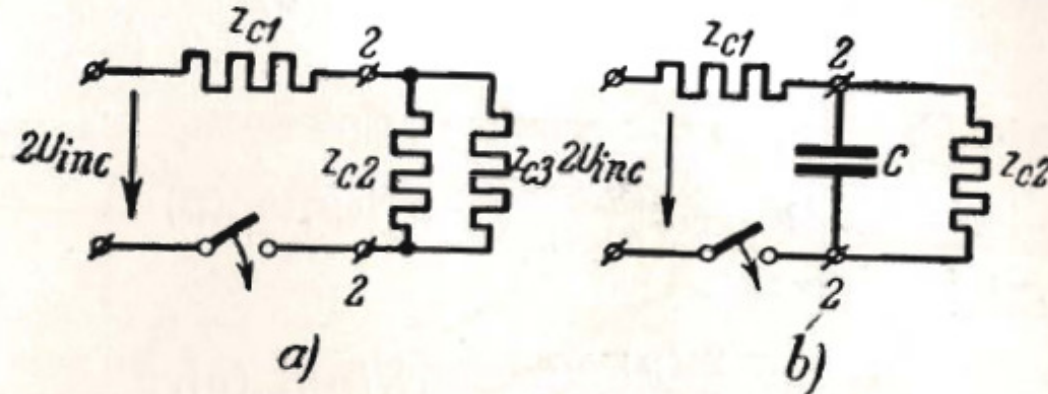


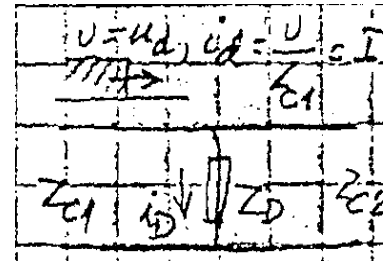
FIG. 7-12



Línea con discontinuidad (más ejemplos en NS p 338)

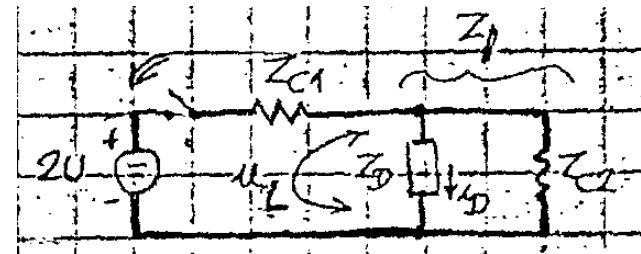
Antes de la discontinuidad se propagan:

$$\begin{cases} u = u_d = U \\ i = i_d = u_d / Z_{C1} = U / Z_{C1} = I \end{cases}$$



Al llegar a la discontinuidad se generan las ondas inversas u_i e i_i que subsisten mientras no aparecen otras ondas debidas a reflexiones, etc. El análisis de lo que pasa en la discontinuidad puede hacerse:

$$u_L = U \cdot \frac{2 \cdot \frac{Z_D \cdot Z_{C2}}{Z_D + Z_{C2}}}{Z_{C1} + \frac{Z_D \cdot Z_{C2}}{Z_D + Z_{C2}}} = U \cdot \frac{2 \cdot Z_{||}}{Z_{C1} + Z_{||}}$$



Dado el ejemplo anterior si ahora la discontinuidad es un capacitor $Z_D = 1/C_p$.

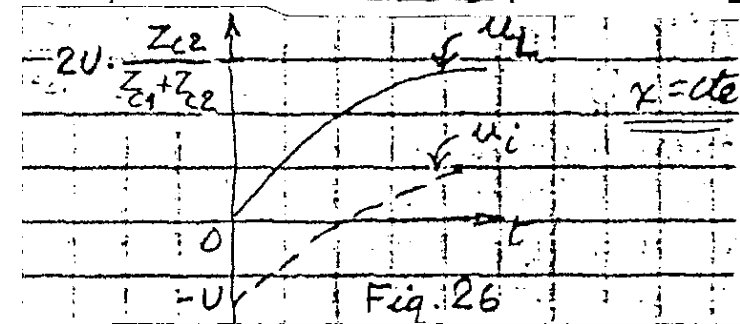
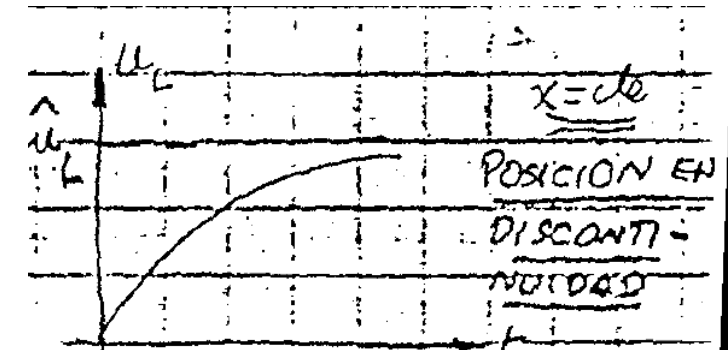
Del circuito se ve que C se carga a través de un divisor resistivo formado por Z_{C1} y Z_{C2} (números reales), cuya solución temporal es :

$$u_L = 2 \cdot U \cdot \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\text{con } \tau = \frac{Z_{C1} \cdot Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \cdot C \quad (\text{fuente pasivada})$$

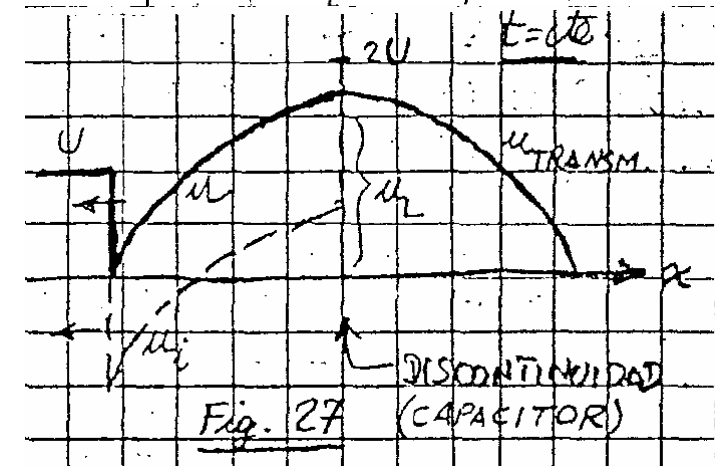
$\forall x, t: u = u_d + u_i$ que para la posición de C ($x = \text{cte}$) es :

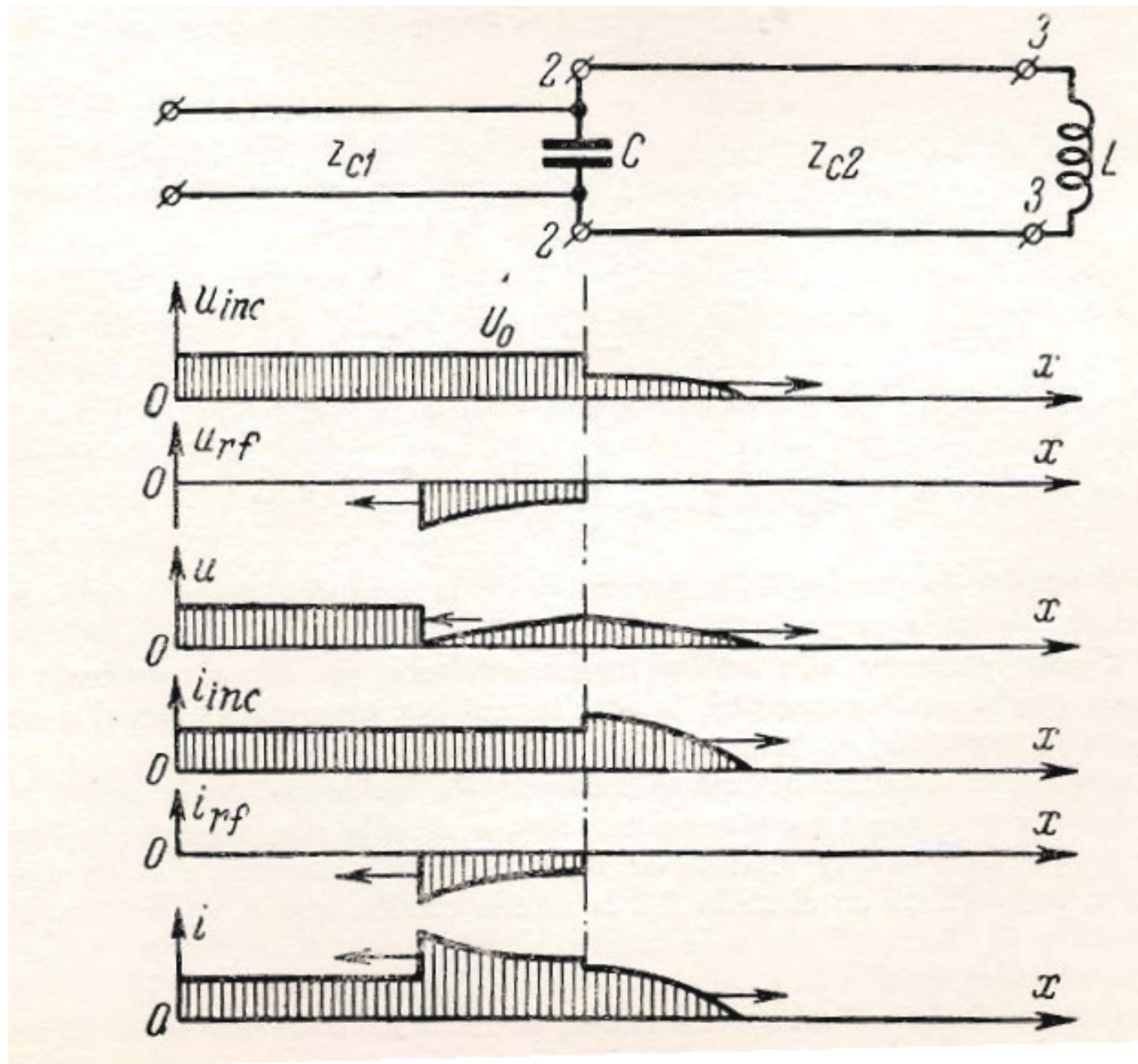
$u_L = U + u_i \therefore u_i = u_L - U$ que sería la onda inversa que retorna



Estas mismas curvas en función de x son las de la figura 27 :

Si Z_{C2} es una máquina de AT ($Z_{C2} = 200$ a 1000Ω) y Z_{C1} una línea aérea ($Z_{C1} \approx 300 \Omega$), el C constituye una eficaz protección contra sobretensiones pues suaviza la pendiente de la onda (menores sobretensiones en las 1^{eras} espiras) aunque la alarga; si el alargamiento es excesivo, u_i (u_{TRANSM}) puede reflejarse nuevamente y volver a la máquina dando lugar a oscilaciones peligrosas.



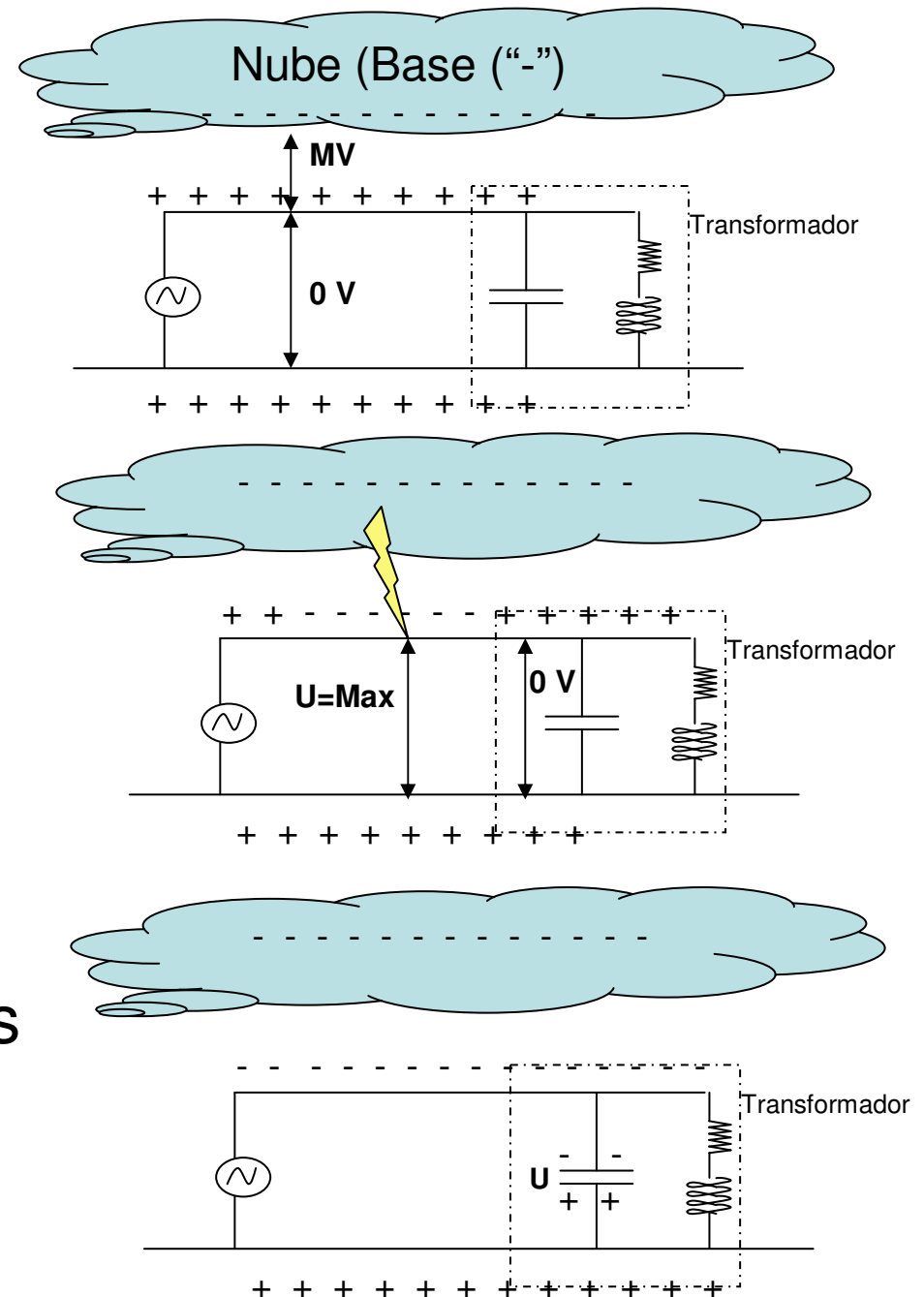


Evolución de las ondas, cuando llega a la carga en 3-3 se repite el fenómeno

A REVISAR

Descarga atmosférica

1. Previo a la descarga. La línea acumula progresivamente cargas a través de aisladores de signo contrario al de la nube.
2. Se inicia la descarga sobre la línea. Las cargas se van recombinando, las “-” más concentradas en el frente. En tierra las “+” casi inmóviles.
3. Se completa la bajada de “-”; la línea y el C entre espiras y a masa del transformador quedan cargados.

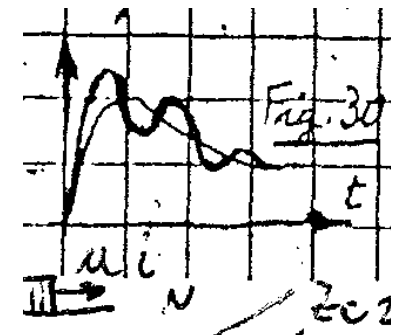
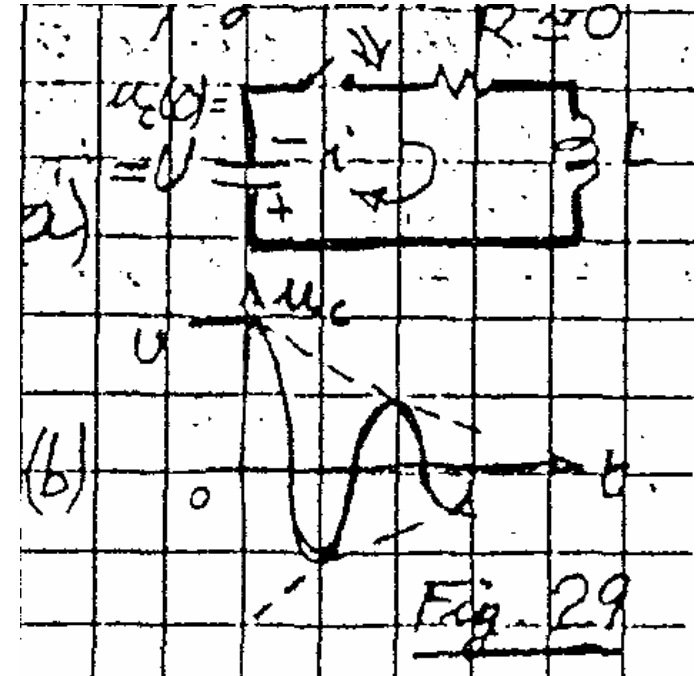


4. Se descarga C sobre el bobinado del transformador, asimilable a

$$u_C = U \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \alpha = \frac{R}{2 \cdot L};$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Las máximas amplitudes no superan U, pero estas oscilaciones en el transformador se superponen a la variación real que impone el rayo.



Parámetros distribuidos en máquinas

Las máquinas eléctricas presentan parámetros distribuidos en forma análoga al caso de las líneas. El caso más importante para analizar es el del transformador por estar frecuentemente conectado a líneas aéreas susceptibles de recibir descargas atmosféricas que originan ondas de alta tensión aunque de breve duración (del orden de los microsegundos). En estos casos es indispensable protegerlos con descargadores de sobretensiones (de carburo de silicio u óxido de zinc) que, no obstante, imponen una tensión muy superior, abrupta, a la nominal de diseño. Esto obliga a adoptar algunas providencias constructivas en los transformadores. El caso más exigido, y felizmente el más fácil de analizar, es el de un transformador con neutro puesto a tierra (que es el que se verá).

Con las máquinas rotativas acontece una situación similar, pero usualmente están sometidas a las sobretensiones internas del sistema (por desconexiones, etc.). Estas sobretensiones en ocasiones pueden ser importantes y deben preverse protecciones acordes a las mismas.

Transformador con neutro a tierra

Considérese el caso de un bobinado de transformador puesta a tierra que recibe un rayo. La distribución de potenciales dependerá de las capacidades a masa y entre espiras. Llamando:

$C_1 = n \cdot C_s$ = capacidad entre 2 espiras, C_s capacidad total serie

$C_1 = \frac{C_p}{n}$ = capacidad de 1 espira a tierra, C_p capacidad total paralelo

o también :

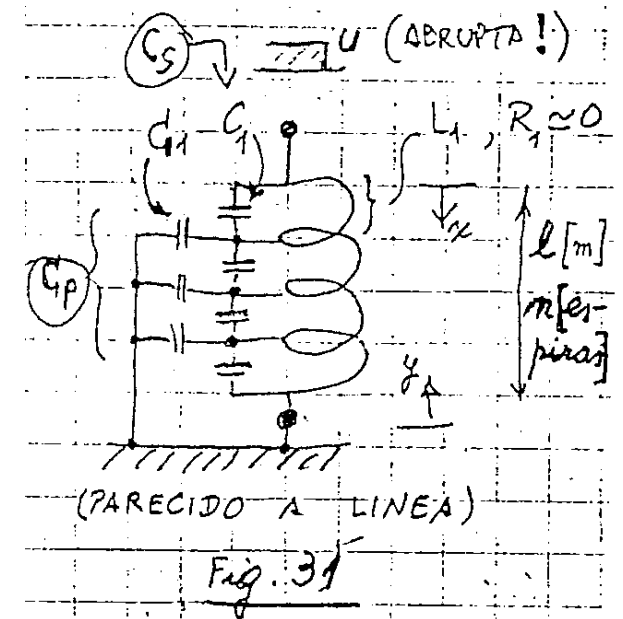
$$\begin{cases} C_s \cdot l = \text{capacidad serie por unidad de longitud,} \\ C_p / l = \text{capacidad paralelo por unidad de longitud} \end{cases}$$

con esta última nomenclatura se observa en la figura :

$$\begin{cases} C_s \cdot l \cdot dx = \text{capacidad serie por } dx \\ C_p / l \cdot dx = \text{capacidad paralelo por } dx \end{cases}$$

$L_1 = \frac{L}{n}$ = inductancia por espira

$(L/l) \cdot dx = \text{inductancia por } dx$



La corriente de descarga no puede atravesar inicialmente ($t=0$) la L y la tensión se reparte en los capacitores

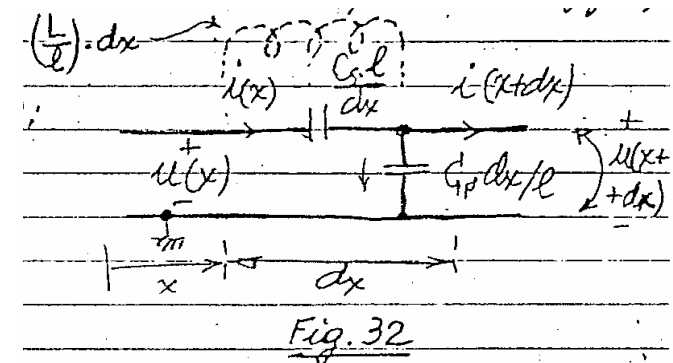
$$\begin{cases} u(x) = \frac{dx}{C_S \cdot l} \cdot \int i \cdot dt + u(x+dx) \\ i(x) = \frac{C_P \cdot dx}{l} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + i(x+dx) \end{cases} ; \text{pero} \begin{cases} u(x+dx) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \\ i(x+dx) = i(x) + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{C_S \cdot l} \cdot \int i \cdot dt \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{C_P}{l} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{C_S \cdot l}\right) \cdot \int \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dt \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{C_S \cdot l}\right) \cdot \int \left(-\frac{C_P}{l}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{C_S \cdot l}\right) \cdot \left(-\frac{C_P}{l}\right) \int \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \text{ o sea que para } t \approx 0 :$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{l^2} \cdot u \quad \text{con } \alpha = \sqrt{\frac{C_P}{C_S}} \text{ cuya solución resulta: } u = A_1 \cdot e^{\frac{\alpha}{l} \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{l} \cdot x} \text{ y con } \begin{cases} x=0 \rightarrow u=U \\ x=l \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 \cdot e^{\alpha} + A_2 \cdot e^{-\alpha} \end{cases} \therefore A_1, A_2 \Rightarrow u = U \cdot \left[e^{-\frac{\alpha}{l} \cdot x} - e^{-\alpha} \cdot \frac{\text{sh}\left(\alpha \cdot \frac{x}{l}\right)}{\text{sh}(\alpha)} \right]$$

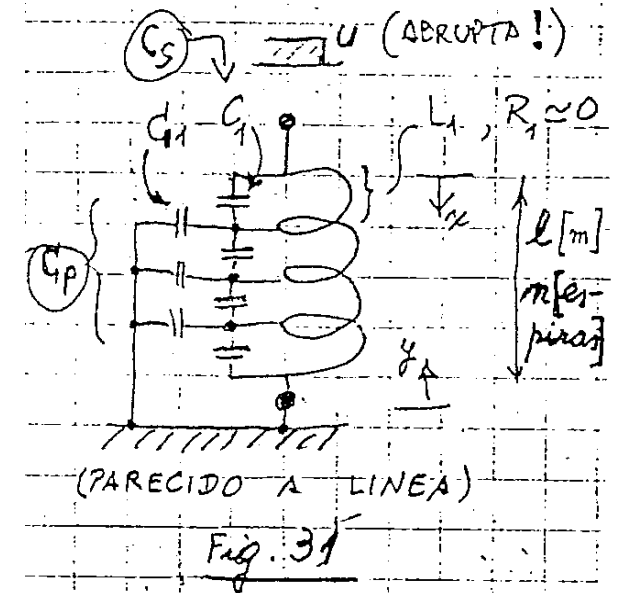


Más simple resulta usar la coordenada y (Ver figura).

La solución es de la misma forma anterior :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\alpha^2}{l^2} \cdot u, \text{ y con : } \begin{cases} y = 0 \rightarrow u = 0 \\ y = l \rightarrow u = U \end{cases} \therefore$$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ U = A_1 \cdot e^{\alpha} + A_2 \cdot e^{-\alpha} \end{cases} \therefore u = U \frac{\text{sh}\left(\alpha \cdot \frac{y}{l}\right)}{\text{sh}(\alpha)}$$

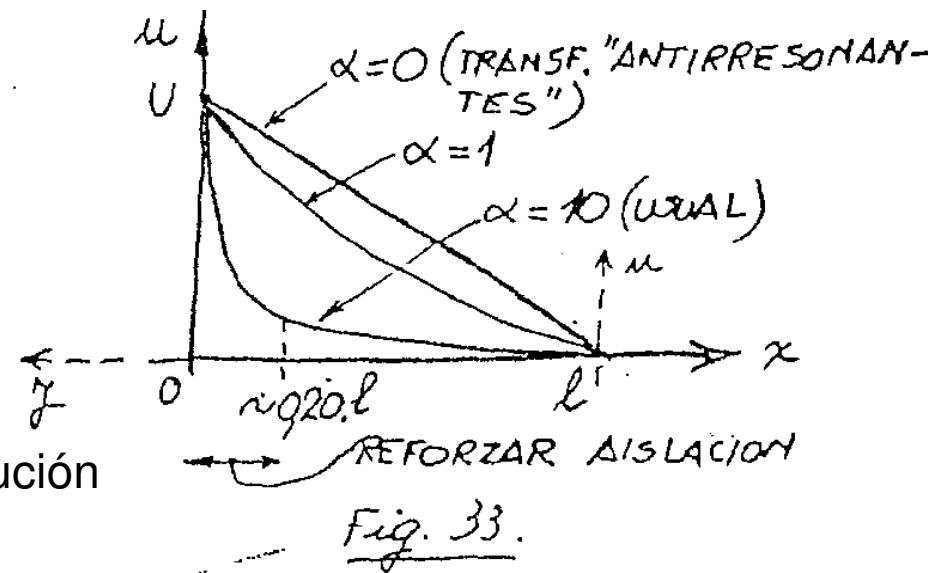


En la figura 33 se da la distribución de tensiones para $t \approx 0$.

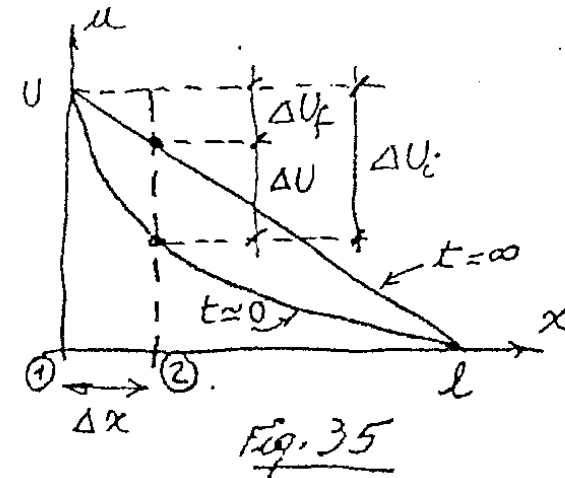
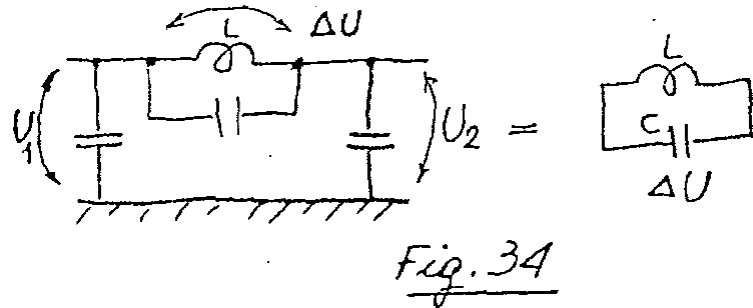
Si $\alpha \rightarrow \infty$: la U queda aplicada en las 1^{eras} espiras.

Si $\alpha \approx 0$: $u = U \cdot \frac{\alpha \cdot y/l}{\alpha} = U \cdot \frac{y}{l}$, y la distribución

de tensiones es la misma que en regimen permanente.



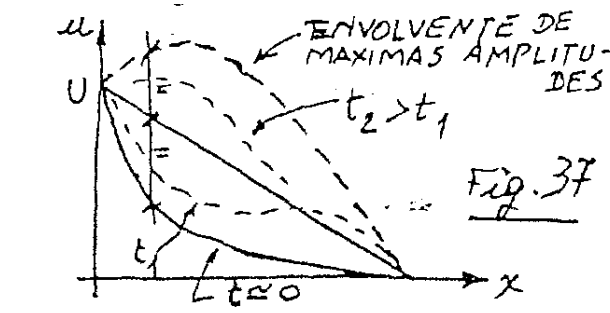
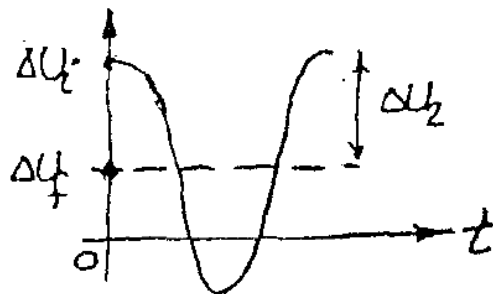
Para un tramo Δx se tiene la figura 34, y el ΔU variará de un valor inicial ΔU_i hasta uno final ΔU_f , (figura 35).



Temporalmente implica una oscilación ΔU_2 para x_2 como

muestra la figura 36, por tratarse de una descarga LC (con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$\therefore$ La máxima amplitud que se alcanza en cada punto está dada por los " ΔU_2 " (figura 37)



Los sucesivos “capacitores” se irán cargando con cierto retraso (carga RC) por lo que las oscilaciones en cada sección no serán contemporáneas.

Como α conviene que sea chico, de [52] se concluye que conviene aumentar C_s y disminuir C_p . Ambas condiciones son difíciles de cumplir por necesidades de aislación. En transformadores de AT existen varias disposiciones constructivas para lograrlo. Una de ellas consiste en reforzar la aislación de las primeras espiras (ver fig 33) e interponer anillos conductores (aislados) entre ellas para que C_s no se vea reducida.

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_p}{C_s}} \quad [52]$$

